BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2014

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

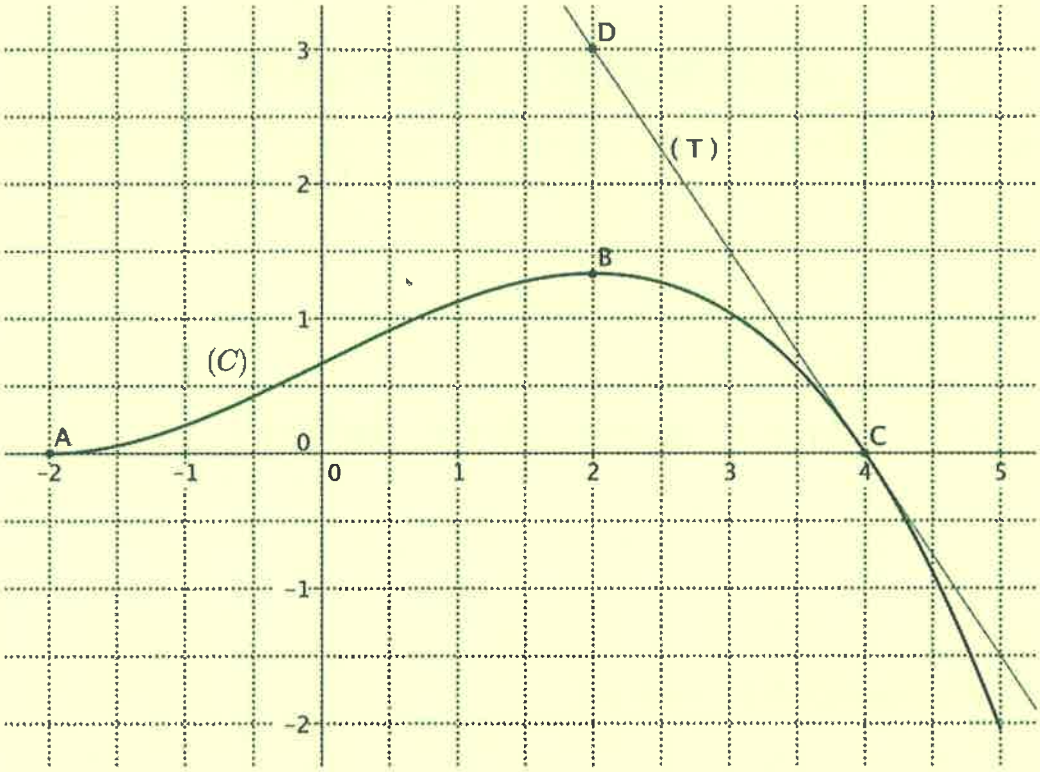
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 – 4 points

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, croissante sur $[-2\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ 5]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $(\mathcal{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points A $(-2\ ;\ 0)$; B $\left(2\ ;\frac{4}{3}\right)$ et C $(4\ ;\ 0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point D $(2\ ;\ 3)$.



Pour chacune des ~~cinq~~ quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\frac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

Proposition 3 : $2 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 3$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2\ ;\ 5]$.

Exercice 2 – 5 points

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.

2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.

Pour tout entier naturel n, on note :

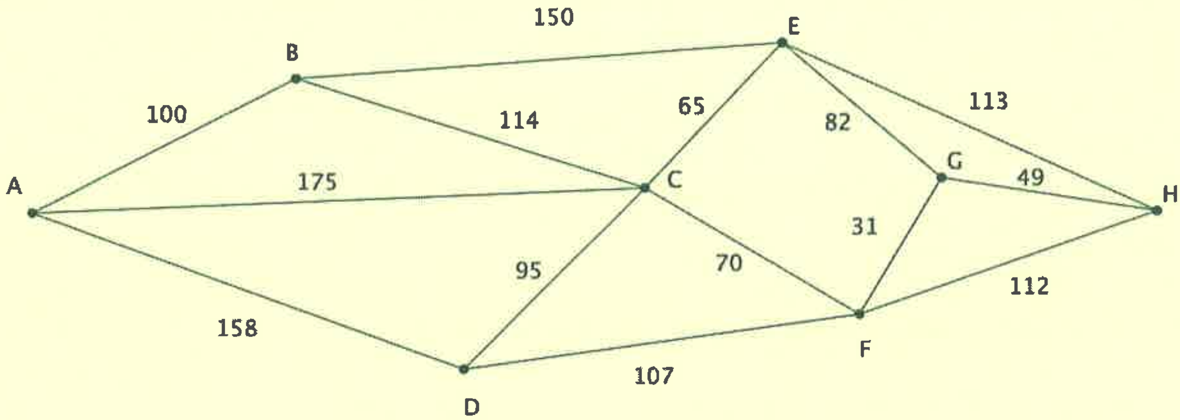
- a_n la probabilité de l'événement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
- h_n la probabilité de l'événement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
- P_n la matrice $(a_n \quad \underset{h_n}{\cancel{b_n}})$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.

4. On donne $P_0 = (0{,}4 \quad 0{,}6)$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel. Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

Exercice 3 – 5 points

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.

Cette fonction f est définie sur $[1\ ;\ 26]$ par : $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1\ ;\ 26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.

2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant.

t	1		4		26
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   a. Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\ ;\ 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

   b. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\ ;\ 26]$ et les variations de f sur $[1\ ;\ 26]$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

   a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : sur $[4\ ;\ 26]$, f' est décroissante.

   b. À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par : $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur $[1\ ;\ 26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$.

1. Déterminer, sur $[1\ ;\ 26]$, une primitive F de la fonction f.

2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\frac{1}{26-1}\,[F(26) - F(1)]$ est 202. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

Exercice 4 – 6 points

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

Partie A : *un premier modèle.*

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2014. Donner une réponse à 0,1% près.

2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite :
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année 2008 + n.
   Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
   a. Que vaut u_0 ?
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}035^n$.
   c. Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

Partie B : *un second modèle.*

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur [0 ;+∞[par : $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-0{,}05x}}$ où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur [0 ;+ ∞ [.

1. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation:	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leq 2$
	X prend la valeur X +1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.